数理解析研究所講究録
270巻 1976年 1-7

データグラフの近似

坂部俊樹　稲垣康善　福村晃夫
（名古屋大学　工学部）

1. まえがき

データグラフはデータ構造のリンク構造のみに注目して得られる有向グラフである。データグラフの一様性の概念は，A.L. Rosenbergによって提唱され，その有用性は文献(1),(2)等で議論されている。著者等は，Rosenbergによって定義されたデータグラフが強連結であるのに対して，弱連結なデータグラフを定義し，Rosenbergの一様性に関する議論が自然に拡張されるばかりでなく，弱連結性を仮定したが故に導かれるデータグラフの新しい一様性の存在，および，それらと計算機記憶空間上でのデータグラフの実現との関連を明らかにした[(4)]。さらに，データグラフの近似の概念を種々の写像（弱準同形写像）によって定式化し，一様性のないデータグラフを一様性のあるデータグラフで近似する問題──データグラフのaddressable近似の問題──について考察し，いくつかの結果を導いた。すなわち，文献(3),(5)では全準同形写像による近似

の定式化のもとでデータグラフがaddressable近似可能であるための条件を明らかにし，文献(6)では，弱準同形写像によって近似の概念を定式化したとき，任意のデータグラフは必らず最適addressable近似されることを示した．このようなデータグラフの近似に関する議論は，データグラフのリンク記号系列集合上の右合同関係と右イデアルとの対，および，その対の集合上の関係で，データグラフおよびデータグラフ間の各種の弱準同形写像を特性化した結果を用いて，半順序集合論的に行なわれる．本報告では，この特性化の結果は省略して，データグラフのaddressable近似に関する結果をまとめて述べる。

2．諸定義

この章では，データグラフ，addressableなデータグラフ，および，データグラフ間の弱準同形写像の定義を簡単に述べる。詳細は文献(4)，(7)を参照されたい。

まず，データグラフは4項組 $\Gamma=(C,\Lambda,\delta,c_0)$ で定義される。ここに，C は節点の可算（あるいは有限）集合，Λ はリンク記号の有限集合，$\delta:\Lambda\to[C\to C]^{+}$，$c_0\in C$ は始点である。さらに，δ は，弱連結条件

$$\forall c\in C,\ \exists x\in\Lambda^*,\ c_0\delta_x=c \tag{1}$$

+ $[C\to C]$ は C 上のすべての部分変換の集合．

を満たすものとする。ただし，δの定義域をΛからΛ^*へ自然に拡張するものとし，δ_xは$x \in \Lambda^*$に対応するC上の部分変換である。Λをリンク記号の集合として持つすべてのデータグラフを$\mathbb{\Gamma}(\Lambda)$と書く。以下ではΛを固定して議論するので，$\mathbb{\Gamma}(\Lambda)$を単に$\mathbb{\Gamma}$と書く．また，データグラフ$\Gamma = (C, \Lambda, \delta, c_0)$が

$$c_0\delta_x = c_0\delta_y \in C \Rightarrow \delta_x = \delta_y \tag{2}$$

を満たすとき，Γは addressable であるといわれ，addressable なデータグラフは相対番地付（relative addressing）が可能であることが知られている[1),(4)]。

2つのデータグラフを$\Gamma = (C, \Lambda, \delta, c_0)$，$\Gamma' = (C', \Lambda, \delta', c_0')$とし，$n$を任意の非負整数とする。次の条件を満たす写像$h : C \to C'$を$\Gamma$から$\Gamma'$への$n$制限準同形写像（以下では n-Homo. と書く。）という．

(i) $c_0 h = c_0'$ (3)

(ii) $\forall c \in C, \forall x \in \Lambda^*, c\delta_x \in C \Rightarrow (ch)\delta'_x = (c\delta_x)h$ (4)

(iii) $\forall c \in C, \forall x \in \Lambda^{(n)}, (ch)\delta'_x \in Ch \Rightarrow c\delta_x \in C$ (5)$^+$

特に，$n=0$，および，nを極限まで大きくした場合（$n=\infty$）には，それぞれ，弱準同形写像（0-Homo.），準同形写像（∞-Homo.）という．

$+$ $\Lambda^{(n)} = \{x \in \Lambda^* \mid$ 系列xの長さ$|x| \leqq n\}$であり，$\Lambda^{(0)} = \{\varepsilon\}$，$\Lambda^{(\infty)} = \lim_{n\to\infty}\Lambda^{(n)} = \Lambda^*$である．

3. 各種のn制限準同形写像の性質

データグラフ間の n-Homo. の性質を知ることは，それ自身，データグラフの性質と関連して興味ある問題であるばかりでなく，n-Homo. が近似の概念を定式化するための道具として用いられることから，きわめて重要である。そこで，まず，onto n-Homo.，あるいは，1-1 n-Homo. の性質を列挙する。（詳細は文献(7)参照）

〈定理1〉　任意の非負整数 n に対して，Γ から Γ' への 1-1 n-Homo. は存在するが，1-1 $(n+1)$-Homo. は存在しないようなデータグラフ Γ，Γ' が存在する。

〈定理2〉　任意の非負整数 n（≥ 1）に対して，onto n-Homo は onto ∞-Homo. である。

〈定理3〉　任意の非負整数 n に対して，1-1 n-Homo と 1-1 n-Homo の合成，および，onto n-Homo. と onto n-Homo. の合成は，それぞれ，1-1 n-Homo，onto n-Homo．である。また，0-Homo. と 0-Homo. の合成は 0-Homo. である。

〈定理4〉　任意の非負整数 n（≥ 1）に対して，n-Homo. と n-Homo. の合成は必らずしも n-Homo. とはならない。

〈定理5〉　0-Homo. は 1-1 ∞-Homo. と onto ∞-Homo. の合成として表わされる。

以上の結果のうち，特に，定理3，4は，データグラフの

近似の議論において重要な意味を持つ。すなわち，各々の写像によってデータグラフの近似の概念を定式化したとき，データグラフΓ''がデータグラフΓ'を近似し，また，Γ'がデータグラフΓを近似しても，Γ''がΓを近似することは保証されない場合があるのである。このことは，近似に関する議論を半順序集合論の手法を用いて簡明に行なうために必要かつ重要な性質である。第4章では，この性質が成り立つ写像，すなわち，定理3で述べられた写像のうち，0-Homo.，onto ∞-Homo. による近似の定式化のもとで，データグラフの addressable 近似について述べる。

4. データグラフの addressable 近似

この章では，データグラフの近似の概念を onto ∞-Homo.，および，0-Homo. によって定式化し，任意に与えられたデータグラフが addressable なデータグラフで近似されるための条件を明らかにする。

すべてのデータグラフの集合$\mathbb{\Gamma}$上で関係$\xrightarrow{0\text{-}H}$，$\xrightarrow{\text{onto } H}$を次のように定める。

$\Gamma_1 \xrightarrow{0\text{-}H} \Gamma_2 \Leftrightarrow$ Γ_1からΓ_2への 0-Homo. が存在する。 (6)

$\Gamma_1 \xrightarrow{\text{onto } H} \Gamma_2 \Leftrightarrow$ Γ_1からΓ_2への onto ∞-Homo. が存在する。(7)

このとき，$(\mathbb{\Gamma}, \xrightarrow{0\text{-}H})$および$(\mathbb{\Gamma}, \xrightarrow{\text{onto } H})$は半順序集合である。一般に，半順序集合$(\mathbb{\Gamma}, \rightarrow)$が与えられたとき，データグラ

フの近似の概念を次のように定式化する．$\Gamma \in \mathbb{\Gamma}$ に対して，

$$Apx_{\mathrm{I}}(\Gamma) = \{ \Gamma' \in \mathbb{\Gamma} \mid \Gamma \to \Gamma' \} \tag{8}$$

$$Apx_{\mathrm{II}}(\Gamma) = \{ \Gamma' \in \mathbb{\Gamma} \mid \Gamma' \to \Gamma \} \tag{9}$$

は，Γ を，それぞれ，I形，あるいは，II形近似するデータグラフの集合であるという．また，すべての addressable なデータグラフの集合 $\mathbb{\Gamma}_r$ に対して，

$$Apx_{\mathrm{I}(\mathrm{II})}(\Gamma) \cap \mathbb{\Gamma}_r \neq \phi \tag{10}$$

のとき，Γ は I(II)形 addressable 近似されるといい，さらに，このとき，$\min\{Apx_{\mathrm{I}}(\Gamma) \cap \mathbb{\Gamma}_r\}$ $(\max\{Apx_{\mathrm{II}}(\Gamma) \cap \mathbb{\Gamma}_r\})$ が存在すれば，Γ は最適I(II)形 addressable 近似されるという。以下に，順序関係 $\to$ が $\xrightarrow{\text{o-H}}$，あるいは，$\xrightarrow{\text{onto H}}$ である場合について，Γ が最適I(II)形 addressable 近似されるための条件を述べる。

〔1〕 $(\mathbb{\Gamma}, \xrightarrow{\text{onto H}})$ における addressable 近似

〈定理6〉 任意のデータグラフは，常に，最適II形 addressable 近似可能である。

〈定理7〉 任意のデータグラフ $\Gamma = (C, \Lambda, \delta, c_0)$ は集合 $\nabla(c_0) = \{ x \in \Lambda^* \mid c_0 \delta x \in C \}$ に対して，

$\forall x, \forall y \in \nabla(c_0)$

$$c_0 \delta x = c_0 \delta y \Rightarrow (\forall u, \forall v \in \Lambda^*, \; uxv \in \nabla(c_0) \Leftrightarrow uyv \in \nabla(c_0)) \tag{11}$$

が成り立つとき，かつ，その時に限って最適I形 addressable

近似可能である。

[2] $(\Gamma, \xrightarrow{o\text{-}H})$ における addressable 近似

〈定理8〉 任意のデータグラフは，常に，最適I形addressable近似可能である。

5. あとがき

0-Homo, onto ∞-Homo 以外の写像を用いて近似の概念を定式化して addressable 近似の可能性を調べること，あるいは，addressability より強い一様性を持つデータグラフによる近似の問題等は今後に残された課題である。また，データグラフを無限状態不完全指定形のオートマトンとしてとらえることも可能であり，データグラフの一様性，データグラフの近似などの概念とオートマトン，言語との関連を調べることも興味ある問題であろう。

最後に，御指導，御討論をして頂く，東北大学本多波雄教授，並びに，福村研究室の方々に感謝の意を表する。

[文献] 1). A.L.Rosenberg, Data graphs and addressing schemes, JCSS, 5, 3, 193〜238.

2) A.L.Rosenberg, Addressable data graphs, JACM, 19, 2, 309〜340

3) Y.Inagaki, T.Sakabe, T.Fukumura, Addressable approximations to non-addressable data graphs, 2nd USA-JAPAN Comp. Conf., Proceeding, 343〜346.

4) 坂部，稲垣，福村，弱連結なデータグラフの一様性と記憶空間上での実現，信学研資 AL74-98.

5) 〃 ，データグラフの最適addressable近似，信学技報 AL75-5.

6) 〃 ，データグラフの最適addressable弱準同形近似，信学技報 AL75-39.

7) 〃 ，データグラフ間の弱準同形写像，信学技報 AL75-72.